Компьютерные инструменты в образовании, 2019
№ 4: 15–32
УДК: 519.87
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

РЕШЕНИЕ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ АЛЬТЕРНАТИВ С ПОМОЩЬЮ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*

Кривулин Н. К.[1], доктор физико-математических наук, доцент, ✉ nkk@math.spbu.ru
Цобенко М. А.[1], студентка, margaritatsobenko@yandex.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр., д. 28, Старый Петергоф, 198504, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматривается задача оценки рейтингов (приоритетов, весов) альтернатив на основе результатов парных сравнений в соответствии с двумя критериями. Описывается формальное построение и вычислительные процедуры решения задачи с использованием методов тропической математики, которая изучает алгебраические системы со специальным образом определенными операциями сложения и умножения. Задача сводится к одновременной аппроксимации двух матриц парных сравнений общей согласованной матрицей в метрике Чебышева в логарифмической шкале. Сначала вводятся вспомогательные переменные для обозначения минимумов целевых функций и составляется параметризованное неравенство, которое определяет множество решений исходной задачи оптимизации. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для определения значений параметров, соответствующих Парето-фронту задачи. Все решения неравенства при найденных значениях параметров берутся в качестве Парето-оптимального решения задачи. Для иллюстрации применяемых вычислительных процедур приводятся численные примеры определения рейтингов альтернатив для задач с матрицами третьего порядка.

Ключевые слова: *тропическая математика, парные сравнения, двухкритериальные задачи, Парето-оптимальное решение, Парето-фронт.*

Цитирование: Кривулин Н. К., Цобенко М. А. Решение двухкритериальной задачи оценки альтернатив с помощью тропической оптимизации // Компьютерные инструменты в образовании. 2019. № 4. С. 15–32. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

1. ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальная оптимизация представляет собой процесс одновременной максимизации (минимизации) двух или более целевых функций, которые могут отвечать взаимно противоречивым критериям. Задачи многокритериальной оптимизации воз-

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №18-020-00723).

никают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием [1–4].

Одно из применений многокритериальной оптимизации связано с оценкой рейтингов (приоритетов, весов) альтернатив принятия решений на основе их парных сравнений [5, 6]. Задачи оценки альтернатив находят применение в различных областях, включая социологию (анализ социологических опросов), политологию (прогноз результатов выборов), маркетинг (изучение предпочтений потребителей) и другие. В таких задачах объекты (характеристики объектов) попарно сравниваются между собой в соответствии с каждым из критериев, используемых для сравнения. Кроме того, могут сравниваться сами критерии, если они имеют разные приоритеты (веса). Результатом являются матрицы парных сравнений альтернатив по всем критериям, а также самих критериев, если они неравнозначны. С помощью анализа полученных матриц парных сравнений определяется индивидуальный рейтинг каждой альтернативы.

Для решения многокритериальных задач определения рейтингов альтернатив с помощью матриц парных сравнений чаще всего используется метод анализа иерархий [2, 6]. В этом методе для каждой матрицы парных сравнений альтернатив и матрицы парных сравнений критериев вычисляется главный собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу матрицы. Рейтинги альтернатив находятся путем суммирования нормированных собственных векторов матриц парных сравнений по каждому критерию, взятых с весами, величину которых определяет нормированный собственный вектор матрицы парных сравнений критериев.

Еще один подход к решению рассматриваемых задач опирается на применение моделей и методов тропической (идемпотентной) математики, которая представляет собой направление прикладной математики, связанное с изучением алгебраических систем со специальным образом определенными операциями сложения и умножения [7–12]. Описание в терминах идемпотентной математики позволяет целый ряд нелинейных в обычном смысле задач превращать в линейные, что во многих случаях приводит к упрощению анализа и решения задачи, а также облегчает представление и интерпретацию результатов. В частности, для задач оптимизации, сформулированных в терминах тропической математики (задач тропической оптимизации), часто могут быть получены прямые аналитические решения в компактной форме, удобной для последующего анализа и непосредственных вычислений. Представление и решение задач оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений с помощью методов тропической математики изучались в работах [13–19].

В настоящей работе описывается формальное построение и вычислительные процедуры решения двухкритериальной задачи оценки рейтингов альтернатив на основе предложенного в [18] подхода с использованием методов тропической оптимизации. Задача сводится к одновременной аппроксимации двух матриц парных сравнений общей согласованной матрицей в метрике Чебышева в логарифмической шкале. Сначала вводятся вспомогательные переменные для обозначения минимумов целевых функций и составляется параметризованное неравенство, которое определяет множество решений исходной задачи оптимизации. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для определения значений параметров, соответствующих Парето-фронту задачи. Затем все решения неравенства при найденных значениях параметров берутся в качестве Парето-оптимального решения задачи. Для иллюстрации применяемых вычислительных процедур приводятся численные примеры определения рейтингов альтернатив для задач с матрицами третьего порядка.

2. ОЦЕНКА АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В этом разделе описывается подход к решению задачи оценки рейтингов альтернатив на основе аппроксимации матриц парных сравнений согласованной матрицей в метрике Чебышева в логарифмической шкале. Сначала показано, как задача аппроксимации одной матрицы может быть сведена к задаче минимизации с целевой функцией простой формы. Затем этот результат используется для формулировки двухкритериальной задачи с двумя матрицами парных сравнений.

2.1. Однокритериальная задача

Рассмотрим задачу оценки рейтингов альтернатив на основе одной матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, где каждый элемент $a_{ij} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива i предпочтительнее альтернативы j. Требуется для каждой альтернативы определить абсолютный рейтинг (приоритет, вес).

Матрица парных сравнений $\boldsymbol{A}$ обычно является обратно симметричной (это означает, что $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$). Кроме того, эта матрица может обладать свойством транзитивности (то есть, $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$).

Обратно симметричная матрица, обладающая свойством транзитивности, называется согласованной. Если матрица $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ является согласованной, то найдется вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ с элементами $x_i > 0$, который определяет элементы матрицы $\boldsymbol{X}$ в соответствии с равенством $x_{ij} = x_i/x_j$ (см., например, [2]). При этом элементы такого вектора $\boldsymbol{x}$ однозначно определяют (с точностью до положительного множителя) абсолютные рейтинги альтернатив, которые требуется найти.

Если матрица парных сравнений $\boldsymbol{A}$ не является согласованной, то естественным решением задачи является аппроксимация матрицы $\boldsymbol{A}$ согласованной матрицей, по которой затем можно прямо определить индивидуальные рейтинги альтернатив.

2.2. Задача log-чебышевской аппроксимации матриц

Рассмотрим задачу аппроксимации положительной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ при помощи матрицы $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ в смысле метрики Чебышева в логарифмической шкале (см. также [17–19]). Задача аппроксимации формулируется как задача минимизации

$$\min_{\boldsymbol{X}} \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}|,$$

где логарифм берется по основанию больше единицы.

Пусть матрица $\boldsymbol{X}$ — согласованная и задается некоторым вектором $\boldsymbol{x} = (x_i)$ так, что $x_{ij} = x_i/x_j$. Тогда, учитывая монотонность логарифма, целевую функцию задачи можно записать в виде

$$\max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}| = \log \max_{i,j} \max\left\{x_i^{-1} a_{ij} x_j, x_i a_{ij}^{-1} x_j^{-1}\right\}.$$

Кроме того, в силу монотонности логарифма минимизация полученной целевой функции эквивалентна минимизации ее аргумента. В результате получаем задачу минимизации относительно вектора $\boldsymbol{x}$ функции

$$\max_{i,j} \max\left\{x_i^{-1} a_{ij} x_j, x_i a_{ij}^{-1} x_j^{-1}\right\}.$$

Наконец, если матрица $\boldsymbol{A}$ — обратно симметричная, то полученной функции можно придать более простой вид

$$\max_{i,j} \max\left\{x_i^{-1} a_{ij} x_j, x_i a_{ji} x_j^{-1}\right\} = \max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j.$$

Таким образом, задача log-чебышевской аппроксимации обратно симметричной матрицы $\boldsymbol{A}$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X}$ сводится к задаче

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j.$$

2.3. Двухкритериальная задача

Пусть имеется n альтернатив, которые сравниваются друг с другом по двум критериям. Результатом сравнений являются обратно симметричные матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$. Требуется на основе этих матриц парных сравнений найти вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x} = (x_i)$.

Задача может быть сведена к одновременной аппроксимации матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ общей согласованной матрицей $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ с элементами $x_{ij} = x_i / x_j$, где x_i — элементы общего вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$. С использованием чебышевской аппроксимации в логарифмической шкале приходим к задаче (см. также [18]):

$$\min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \max_{1 \le i,j \le n} x_i^{-1} a_{ij} x_j, \max_{1 \le k,l \le n} x_k^{-1} b_{kl} x_l \right\}. \tag{1}$$

Учитывая, что в общем случае точки минимума целевых функций не совпадают, для решения двухкритериальных (многокритериальных) задач применяются специальные методы. При решении задач оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений наибольшее распространение получил метод анализа иерархий [2, 6] на основе вычисления главных собственных векторов матриц парных сравнений.

Одним из общих методов решения многокритериальных задач является метод скаляризации, при котором векторная целевая функция заменяется взвешенной суммой (или взвешенным максимумом), а затем решается обычная (однокритериальная) задача оптимизации [1, 3, 4]. При решении задач оценки альтернатив с помощью log-чебышевской аппроксимации матриц такой подход используется в работах [16, 19].

Наиболее полным решением задачи является Парето-оптимальное решение [1, 3, 4], состоящее из таких векторов $\boldsymbol{x}$, изменение которых для улучшения значения одного критерия невозможно без ухудшения значения другого.

Рассмотрим задачу двухкритериальной оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\},$$

где f_1 и f_2 — целевые функции критериев, S — множество допустимых решений.

Решения $\boldsymbol{x} \in S$ называют оптимальным по Парето, если не существует $\boldsymbol{x}' \in S$ такого, что $f_i(\boldsymbol{x}') \le f_i(\boldsymbol{x})$ для всех $i = 1, 2$ и $f_i(\boldsymbol{x}') < f_i(\boldsymbol{x})$ хотя бы для одного i.

Решением задачи двухкритериальной оптимизации является множество всех Парето-оптимальных допустимых точек (Парето-множество). Для построения решения двухкритериальных задач часто используют Парето-фронт, который определяют как образ Парето-множества в пространстве значений целевых функций.

В следующих разделах для двухкритериальной задачи оценки рейтингов альтернатив с помощью методов тропической математики строится Парето-фронт и находятся все Парето-оптимальные решения.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

В этом разделе приводятся основные определения и обозначения тропической математики [7–12], необходимые для последующего описания задачи тропической оптимизации и ее решения.

3.1. Идемпотентное полуполе

Идемпотентное полуполе — алгебраическая система $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$ с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, которые имеют нейтральные элементы нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ ассоциативны и коммутативны, сложение обладает свойством идемпотентности (это означает, что для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $x \oplus x = x$), умножение дистрибутивно относительно сложения, а каждый ненулевой элемент имеет обратный (для любого $x \neq \mathbb{0}$ найдется элемент x^{-1} такой, что выполняется равенство $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$).

Операция возведения в степень с целым показателем вводится обычным путем. Для любого $x \neq \mathbb{0}$ и целого $p > 0$ определим $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1} \otimes x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$ и $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$. Предполагается, что введенная операция возведения в целую степень может быть естественным образом распространена на случай рационального показателя степени.

В силу идемпотентности сложения на $\mathbb{X}$ определено отношение $\leq$ частичного порядка так, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Отсюда, в частности, следует справедливость неравенств $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$, а также равносильность неравенства $x \oplus y \leq z$ и системы неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$.

Нетрудно проверить свойство монотонности операций сложения и умножения, по которому при условии $x \leq y$ для любого z выполняются неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $x \otimes z \leq y \otimes z$. Кроме того, для любых $x, y \neq \mathbb{0}$ и рационального q из неравенства $x \leq y$ следуют неравенства $x^q \geq y^q$, если $q < 0$, и $x^q \leq y^q$, если $q \geq 0$. Далее будем считать, что введенный частичный порядок является линейным.

Примером идемпотентного полуполя, заданного на множестве неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$, является полуполе $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+, \max, \times, 0, 1 \rangle$, которое обычно называют max-алгеброй. В этом полуполе сложение $\oplus$ определено как вычисление максимума, умножение $\otimes$ — как обычное умножение, роль нуля $\mathbb{0}$ и единицы $\mathbb{1}$ играют арифметический нуль 0 и единица 1.

В дальнейшем для упрощения записи знак умножения $\otimes$ будем опускать.

3.2. Идемпотентная алгебра векторов и матриц

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц над $\mathbb{X}$, состоящих из m строк и n столбцов. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, является нулевой. Матрица, у которой нет нулевых строк (столбцов), называется регулярной по строкам (столбцам). Квадратная матрица, у которой все диагональные элементы равны $\mathbb{1}$, а недиагональные — $\mathbb{0}$, является единичной и обозначается через $\boldsymbol{I}$. Заметим, что в случае max-алгебры нулевая и единичная матрицы имеют обычный вид.

Сложение и умножение согласованных по размеру матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и умножение матрицы на скаляр x выполняются по стандартным правилам с заменой арифметических операций на операции $\oplus$ и $\otimes$ в соответствии с формулами

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} b_{kj}, \qquad (x\boldsymbol{A})_{ij} = x a_{ij}.$$

Неравенства для матриц и векторов рассматриваются как покомпонентные в смысле введенного выше отношения порядка. Свойства монотонности скалярных операций переносятся на операции над матрицами.

Как обычно, матрица, состоящая из одного столбца или строки, образует вектор. Множество вектор-столбцов размерности n обозначается $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым и обозначается $\mathbf{0}$. Вектор называется регулярным, если он не содержит нулевых компонент. В max-алгебре регулярность вектора означает, что все его компоненты положительны (положительный вектор).

Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами

$$x_i^- = \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{если } x_i \neq \mathbb{0}; \\ \mathbb{0}, & \text{если } x_i = \mathbb{0}. \end{cases}$$

Для всех регулярных векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ из неравенства $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ вытекает $\boldsymbol{x}^- \geq \boldsymbol{y}^-$.

Вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{X}^n$, если его можно представить в виде $\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus c_m \boldsymbol{x}_m$, где $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{X}$. В частности, вектор $\boldsymbol{y}$ является коллинеарным вектору $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$.

3.3. Квадратные матрицы

Операция возведения в целую неотрицательную степень квадратных матриц вводится обычным путем. Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и целого $p > 0$ определим $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$.

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n \times n}$ следом матрицы называется величина

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Для любых матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одного порядка и скалярной величины x выполняются следующие равенства:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{B}, \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}), \qquad \operatorname{tr}(x\boldsymbol{A}) = x \operatorname{tr} \boldsymbol{A}.$$

Применение этих свойств следа приводит к биномиальному тождеству, которое для любых целых $m \geq 0$ имеет вид

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^m = \operatorname{tr} \boldsymbol{B}^m \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m-k} \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}). \tag{2}$$

Скаляр $\lambda \in \mathbb{X}$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ такой, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m).$$

Сумма следов n первых степеней матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается символом

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{A}^{m}.$$

Воспользовавшись биномиальным тождеством для следа (2), получим тождество

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{m=0}^{n-k} \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m} \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}\, \boldsymbol{B}^{k}. \tag{3}$$

3.4. Векторные неравенства

Предположим, что для заданных матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^{m}$ требуется найти решения $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$ неравенства

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}. \tag{4}$$

Сформулируем следующее утверждение (см., например, [8, 11, 12]):

Лемма 1. *Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{b}$ все решения неравенства* (4) *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Пусть задана матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и необходимо отыскать все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, для которых выполняется неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Чтобы записать решение неравенства в компактной векторной форме, определим при условии, что $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, матрицу Клини

$$\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Все решения неравенства (5) дает следующий результат [20].

Лемма 2. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ справедливы утверждения:*

1) *если* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, *то все регулярные решения неравенства* (5) *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0};$$

2) *если* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$, *то регулярных решений не существует.*

4. РЕШЕНИЕ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть имеются две положительные обратно симметричные матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ парных сравнений альтернатив относительно двух критериев. Рассмотрим задачу (1), к которой сводится log-чебышевская аппроксимации этих матриц общей согласованной матрицей $\boldsymbol{X} = (x_i/x_j)$, заданной положительным вектором $\boldsymbol{x} = (x_i)$. После замены арифметических операций на операции идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ задача принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{x}} \left\{ \bigoplus_{1\leq i,j\leq n} x_i^{-1} a_{ij} x_j, \ \bigoplus_{1\leq k,l\leq n} x_k^{-1} b_{kl} x_l \right\}.$$

Переходя к векторной форме, получим задачу

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad \{\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\}. \tag{6}$$

Чтобы найти все Парето-оптимальные решения, будем использовать подход на основе исследования параметризованных неравенств, который первоначально использовался для решения однокритериальных задач [20], а затем был применен к многокритериальным задачам [18]. При таком подходе сначала вводятся вспомогательные параметры для обозначения минимумов целевых функций и составляется параметризованное неравенство, которое определяет множество решений исходной задачи оптимизации. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для описания значений параметров, которые определяют Парето-фронт задачи, а все решения неравенства при найденных значениях параметров берутся в качестве Парето-оптимальных решений задачи.

4.1. Исследование области значений критериев

Рассмотрим двухкритериальную задачу (6) и построим для нее Парето-фронт. Обозначим оптимальное по Парето значение целевой функции $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ через θ, а функции $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ — через σ. Тогда все Парето-оптимальные решения задачи определяются системой уравнений

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \theta, \qquad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \sigma.$$

Учитывая, что θ и σ являются оптимальными (минимальными) значениями, множество решений не изменится, если равенства заменить на неравенства

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \theta, \qquad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \sigma.$$

После решения с помощью леммы 1 первого неравенства относительно $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и второго относительно $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ получим

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \sigma^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}.$$

Последнюю систему неравенств запишем в виде эквивалентного неравенства

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}.$$

Заметим, что полученное неравенство имеет вид неравенства из леммы 2. Следовательно, можно применить эту лемму, чтобы получить решение задачи в виде

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

В условии леммы 2 для существования решений неравенства должно выполняться условие

$$\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B}) \leq 1.$$

Теперь будем решать последнее неравенство относительно переменных θ и σ. Заметим, что решение этого неравенства определяет образ множества допустимых значений $\boldsymbol{x}$ в пространстве критериев (двумерных векторов целевых функций), на границе которой расположен Парето-фронт рассматриваемой двухкритериальной задачи.

Воспользуемся формулой (3) для преобразования этого неравенства к виду

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=0}^{n-k}\theta^{-k}\sigma^{-m}\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k})\oplus\bigoplus_{k=1}^{n}\sigma^{-k}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^k\leq 1.$$

Последнее неравенство равносильно системе неравенств

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=0}^{n-k}\theta^{-k}\sigma^{-m}\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k})\leq 1,\qquad\bigoplus_{k=1}^{n}\sigma^{-k}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^k\leq 1.$$

Полученная система эквивалентна следующей:

$$\theta^{-k}\bigoplus_{m=0}^{n-k}\sigma^{-m}\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k})\leq 1,\qquad\sigma^{-k}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^k\leq 1,\qquad k=1,\ldots,n.$$

Решая первое неравенство относительно θ, а второе — относительно σ, приходим к системе

$$\bigoplus_{m=0}^{n-k}\sigma^{-m/k}\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k})\leq\theta,\qquad\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k)\leq\sigma,\qquad k=1,\ldots,n.$$

Объединение неравенств для всех $k=1,\ldots,n$ дает в результате систему

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=0}^{n-k}\sigma^{-m/k}\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k})\leq\theta,\qquad\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k)\leq\sigma.\tag{8}$$

Обозначая через μ спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, а через ν спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$, запишем

$$\mu=\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k)>0,\qquad\nu=\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k)>0.$$

Кроме того, определим

$$\delta_{km}=\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}),\qquad\delta_{k0}=\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k),\qquad k,m\geq 1.$$

Заметим, что $\delta_{km}>0$, а также что

$$\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=0}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}=\mu+\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}.$$

С помощью введенных обозначений запишем систему (8) в виде

$$\mu\oplus\bigoplus_{k=1}^{n}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}\leq\theta,\qquad\nu\leq\sigma.\tag{9}$$

Для всех $\sigma>0$ рассмотрим функцию

$$f(\sigma)=\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}.$$

Учитывая, что функция f монотонно убывает и принимает все возможные положительные значения, уравнение

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}=\mu$$

имеет единственное решение. Чтобы найти решение, заменим уравнение системой неравенств, среди которых хотя бы одно выполняется как равенство:

$$\mu\geq\sigma^{-m/k}\delta_{km},\qquad m=1,\dots,n-k;\qquad k=1,\dots,n-1.$$

Решение неравенств относительно σ приводит к системе

$$\sigma\geq\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},\qquad m=1,\dots,n-k;\qquad k=1,\dots,n-1.$$

Объединяя неравенства и учитывая, что, по крайней мере, одно из них является равенством, получим решение уравнения в виде

$$\sigma=\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Используем полученное решение уравнения для решения неравенств

$$\mu\geq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km},\qquad \mu<\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}.$$

В силу монотонности функции в правой части решения неравенств имеют вид

$$\sigma\geq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},\qquad \sigma<\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

4.2. Построение Парето-фронта и Парето-оптимального решения

Рассмотрим два случая решения системы (9), для которых исследуем множество точек Парето-фронта задачи.

Случай 1. Предположим сначала, что выполняется неравенство

$$\mu\geq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}.$$

После решения этого неравенства относительно σ и объединения полученного результата со вторым неравенством системы (9) получим систему, которая задает образ множества допустимых решений в пространстве значений критериев в виде

$$\mu\leq\theta,\qquad \nu\oplus\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}\leq\sigma. \tag{10}$$

Пусть выполняется условие

$$\nu\geq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Тогда образ множества допустимых значений решений будет состоять из точек (θ,σ), которые удовлетворяют условиям

$$\mu \le \theta, \qquad \nu \le \sigma.$$

Ясно, что для любой внутренней точки области, для которой $\theta > \mu$ и $\sigma > \nu$, найдется точка с меньшими значениями критериев, а потому такая точка не может принадлежать Парето-фронту. Аналогично, все точки прямой $\theta = \mu$, для которых $\sigma > \nu$, и прямой $\sigma = \nu$, для которых $\theta > \mu$, также не принадлежат Парето-фронту.

Следовательно, при рассматриваемом условии Парето-фронт представляет собой точку, которая получается при замене неравенств на равенства,

$$\theta = \mu, \qquad \sigma = \nu.$$

Соответствующее этой точке множество Парето-оптимальных решений (7) задачи принимает вид

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Если выполнено условие

$$\nu < \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},$$

то система (10) сводится к системе

$$\mu \le \theta, \qquad \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m} \le \sigma.$$

Как и раньше, Парето-фронт при этом условии представляет собой точку

$$\theta = \mu, \qquad \sigma = \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Все регулярные Парето-оптимальные решения задачи записываются в виде

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}, \qquad \sigma = \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Случай 2. Допустим, что выполняется неравенство

$$\mu < \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}.$$

С учетом полученного выше решения этого неравенства система (9) переходит в систему

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km} \le \theta, \qquad \nu \le \sigma < \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Заметим, что второе неравенство задает непустое множество значений σ только тогда, когда выполняется условие

$$\nu < \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Объединяя полученное решение с решением, найденным при этом условии выше, приходим к системе

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}\leq\theta,\qquad \nu\leq\sigma\leq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m}.$$

Из полученных соотношений следует, что образ множества допустимых решений теперь образует область, ограниченную слева и снизу криволинейным отрезком

$$\theta=\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km},\qquad \nu\leq\sigma\leq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},$$

который составляет Парето-фронт задачи в рассматриваемом случае.

Соответствующие Парето-оптимальные решения записываются в виде (7).

Представим полученное выше общее решение двухкритериальной задачи оптимизации как решение задачи оценки альтернатив (6) в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — положительные обратно симметричные матрицы парных сравнений n альтернатив относительно двух критериев. Обозначим спектральные радиусы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ через*

$$\mu=\bigoplus_{m=1}^{n}\mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m),\qquad \nu=\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k)$$

и положим

$$\delta_{km}=\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m}\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}),\qquad k,m\geq 1.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Если выполняется условие*

$$\nu<\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},$$

то Парето-фронт задачи образует множества точек (θ,σ) таких, что

$$\theta=\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\sigma^{-m/k}\delta_{km},\qquad \nu\leq\sigma\leq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},$$

а множество всех Парето-оптимальных решений состоит из векторов рейтингов альтернатив, которые определяются условиями:

$$\boldsymbol{x}=(\theta^{-1}\boldsymbol{A}\oplus\sigma^{-1}\boldsymbol{B})^*\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}.$$

2. *Если выполняется условие*

$$\nu\geq\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=1}^{n-k}\mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m},$$

то Парето-фронт задачи (6) вырождается в точку

$$\theta=\mu,\qquad \sigma=\nu,$$

а множество всех Парето-оптимальных решений состоит из векторов

$$\boldsymbol{x}=(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\oplus\nu^{-1}\boldsymbol{B})^*\boldsymbol{u},\qquad \boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}.$$

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим примеры построения Парето-фронта и нахождения Парето оптимального решения для различных случаев задания положительных обратно симметричных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ парных сравнений $n = 3$ альтернатив.

Пример 1. Рассмотрим задачу определения вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ рейтингов альтернатив на основе матриц парных сравнений

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для построения Парето-фронта и множества Парето-оптимальных решений задачи в соответствии с теоремой 1 сначала найдем спектральные радиусы μ и ν матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Для этого вычислим степени этих матриц

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 4/3 & 2 & 4 \\ 2/3 & 4/3 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление спектральных радиусов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ дает следующий результат:

$$\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = (4/3)^{1/3}, \qquad \nu = \operatorname{tr}\boldsymbol{B} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{B}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{B}^3) = 1.$$

Теперь построим матрицы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2/3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2/3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4 & 4 \\ 2/3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью которых найдем величины

$$\delta_{11} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = 2, \qquad \delta_{12} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2) = 2, \qquad \delta_{21} = \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}) = 2^{1/2}.$$

Проверим выполнение условий теоремы 1. Используя найденные значения, получим

$$\bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{m=1}^{3-k} \mu^{-k/m}\delta_{km}^{k/m} = \mu^{-1}\delta_{11} \oplus \mu^{-1/2}\delta_{12}^{1/2} \oplus \mu^{-2}\delta_{21}^{2} = 2^{1/3}3^{1/3} > \nu.$$

В силу полученного неравенства Парето-фронт принимает форму отрезка кривой, заданного соотношениями

$$\theta = \bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{m=1}^{3-k} \sigma^{-m/k}\delta_{km} = 2\sigma^{-1} \oplus 2\sigma^{-2} \oplus 2^{1/2}\sigma^{-1/2}, \qquad 1 \le \sigma \le 2^{1/3}3^{1/3}.$$

Нетрудно проверить, что для всех σ таких, что $1 \le \sigma \le 2^{1/3}3^{1/3}$, выполняется равенство $2\sigma^{-1} \oplus 2\sigma^{-2} \oplus 2^{1/2}\sigma^{-1/2} = 2\sigma^{-1}$. Тогда полученные соотношения для Парето-фронта можно упростить и записать все Парето-оптимальные решения в виде

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}, \qquad \theta = 2\sigma^{-1}, \qquad 1 \le \sigma \le 2^{1/3}3^{1/3}.$$

Найдем решения, которые соответствуют концам отрезка, описывающего Парето-фронт задачи. Сначала рассмотрим точку с координатами $\theta = 2$ и $\sigma = 1$. Вычислим матрицы

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B} = 2^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}, \qquad (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все столбцы матрицы Клини коллинеарны. Выбрав для записи решения первый столбец, получим вектор рейтингов альтернатив в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} u \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \end{pmatrix} u, \qquad u > 0.$$

Полученный вектор устанавливает следующий порядок альтернатив:

$$(1) \succ (2) \equiv (3).$$

Рассмотрим точку Парето-фронта, для которой $\theta = 2^{2/3}3^{-1/3}$ и $\sigma = 2^{1/3}3^{1/3}$. Составим матрицу

$$2^{-4/3}3^{2/3}\boldsymbol{A} \oplus 2^{1/3}3^{-2/3}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2^{-2/3}3^{1/3} & 2^{1/3}3^{1/3} & 2^{-2/3}3^{4/3} \\ 2^{-5/3}3^{1/3} & 2^{-2/3}3^{1/3} & 2^{1/3}3^{1/3} \\ 2^{-2/3}3^{-2/3} & 2^{-1/3}3^{-1/3} & 2^{-2/3}3^{1/3} \end{pmatrix}$$

и возведем эту матрицу в квадрат

$$(2^{-4/3}3^{2/3}\boldsymbol{A} \oplus 2^{1/3}3^{-2/3}\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 2^{-4/3}3^{2/3} & 2^{-1/3}3^{2/3} & 2^{2/3}3^{2/3} \\ 2^{-1/3}3^{-1/3} & 1 & 2^{-1/3}3^{2/3} \\ 2^{-4/3}3^{-1/3} & 2^{-1/3}3^{-1/3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу Клини

$$(2^{-4/3}3^{2/3}\boldsymbol{A} \oplus 2^{1/3}3^{-2/3}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2^{1/3}3^{1/3} & 2^{2/3}3^{2/3} \\ 2^{-1/3}3^{-1/3} & 1 & 2^{1/3}3^{1/3} \\ 2^{-2/3}3^{-2/3} & 2^{-1/3}3^{-1/3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что все столбцы матрицы Клини коллинеарны. Запишем решение с помощью первого столбца:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^{-1/3}3^{-1/3} \\ 2^{-2/3}3^{-2/3} \end{pmatrix} u \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5503 \\ 0.3029 \end{pmatrix} u, \qquad u > 0.$$

Это решение упорядочивает альтернативы следующим образом:

$$(1) \succ (2) \succ (3).$$

Оба найденных решения можно записать вместе в форме

$$(1) \succ (2) \succeq (3).$$

Полученный результат позволяет заключить, что любое Парето-оптимальное решение рассматриваемой задачи оценки альтернатив присваивает наивысший рейтинг (приоритет, вес) первой альтернативе. Вторая альтернатива всегда получает более низкий рейтинг. Третья альтернатива в зависимости от применяемого критерия имеет рейтинг, который равен или меньше рейтинга второй альтернативы.

Пример 2. Решим задачу оценки рейтингов альтернатив при условии, что заданы матрицы парных сравнений

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что простой анализ элементов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в этом примере показывает, что в соответствии с каждой из матриц ни одна из альтернатив не может иметь более высокий рейтинг, чем любая другая. Проверим, что решение двухкритериальной задачи также приведет к вектору одинаковых рейтингов альтернатив.

Сначала найдем степени матриц

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 9 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 3 & 9 \\ 9 & 27 & 3 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

и их спектральные радиусы

$$\mu = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = 2, \qquad \nu = \operatorname{tr} \boldsymbol{B} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{B}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{B}^3) = 3.$$

Вычислим матрицы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 9 \\ 9 & 6 & 18 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 12 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix},$$

и найдем величины

$$\delta_{11} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = 6, \qquad \delta_{12} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2) = 6, \qquad \delta_{21} = \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}) = \sqrt{6}.$$

Учитывая, что для задачи выполняется равенство

$$\bigoplus_{k=1}^{2} \bigoplus_{m=1}^{3-k} \mu^{-k/m} \delta_{km}^{k/m} = \mu^{-1}\delta_{11} \oplus \mu^{-1/2}\delta_{12}^{1/2} \oplus \mu^{-2}\delta_{21}^{2} = 3 = \nu,$$

Парето-фронт по теореме 1 вырождается в точку с координатами

$$\theta = \bigoplus_{k=1}^{2} \bigoplus_{m=1}^{3-k} \sigma^{-m/k} \delta_{km} = 6\sigma^{-1} \oplus 6\sigma^{-2} \oplus \sqrt{6}\sigma^{-1/2} = 2, \qquad \sigma = 3.$$

Чтобы найти множество Парето-оптимальных решений, вычислим матрицы

$$(2^{-1}\boldsymbol{A} \oplus 3^{-1}\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad (2^{-1}\boldsymbol{A} \oplus 3^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы матрицы Клини равны, для записи решений достаточно взять только один. Окончательно получим все решения в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \qquad u > 0,$$

откуда следует, что все альтернативы в задаче имеют одинаковые рейтинги:

$$(1) \equiv (2) \equiv (3).$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача многокритериальной оптимизации, которая возникает при оценке рейтингов альтернатив на основе их парных сравнений в соответствии с двумя критериями. Представлено полное аналитическое решение задачи для случая произвольного числа альтернатив, полученное с помощью методов тропической оптимизации в компактной векторной форме. Приведены иллюстративные примеры численного решения задач оценки рейтингов трех альтернатив.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на решение задач с тремя и более критериями.

Список литературы

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.
3. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.
4. *Ehrgott M.* Multicriteria Optimization. Berlin: Springer, 2005. doi:10.1007/3-540-27659-9
5. *Thurstone L. L.* A law of comparative judgment // Psychological Review. 1927. Vol. 34. № 4. P. 273–286. doi:10.1037/h0070288
6. *Saaty T. L.* A scaling method for priorities in hierarchical structures // J. Math. Psych. 1977. Vol. 15. № 3. P. 234–281. doi:10.1016/0022-2496(77)90033-5
7. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 258 p. doi:10.1007/978-3-642-48708-8
8. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity // Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.
9. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
10. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p. doi:10.1007/978-94-017-0383-3
11. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.
12. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.
13. *Elsner L., van den Driessche P.* Max-algebra and pairwise comparison matrices, II // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432. № 4. P. 927–935. doi:10.1016/j.laa.2009.10.005
14. *Gursoy B. B., Mason O., Sergeev S.* The analytic hierarchy process, max algebra and multi-objective optimisation // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438. № 7. P. 2911–2928. doi:10.1016/j.laa.2012.11.020
15. *Кривулин Н. К., Гладких И. В.* Построение согласованной матрицы парных сравнений в маркетинговых исследованиях на основе методов тропической математики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 8. Менеджмент. 2015. Вып. 1. С. 3–43.
16. *Krivulin N.* Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // 2016 Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing / Ed. by A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia, PA: SIAM, 2016. P. 62–72. doi:10.1137/1.9781611974690.ch7
17. *Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В.* Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 27–41.
18. *Krivulin N. K.* Using tropical optimization techniques in bi-criteria decision problems // Comput. Manag. Sci. 2018. Vol. 17. № 1. P. 79–104. doi:10.1007/s10287-018-0341-x

19. *Krivulin N. K., Sergeev S. N.* Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51. doi:10.1016/j.fss.2018.10.013
20. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64. № 5. P. 1107–1129. doi:10.1080/02331934.2013.840624

Поступила в редакцию 26.11.2019, окончательный вариант — 15.12.2019.

Кривулин Николай Кимович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, ✉ nkk@math.spbu.ru

Цобенко Маргарита Александровна, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, margaritatsobenko@yandex.ru

---

Computer tools in education, 2019
№ 4: 15–32
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

Solution of the Two-Criteria Problem of Rating Alternatives using Tropical Optimization

Krivulin N. K.[1], PhD, professor, ✉ nkk@math.spbu.ru
Tsobenko M. A.[1], bachelor, margaritatsobenko@yandex.ru

[1]Saint Petersburg State University, 28 Universitetskiy pr., Stary Peterhof, 198504, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The problem of evaluating the ratings (priorities, weights) of alternatives based on the results of pairwise comparisons in accordance with two criteria is considered. The formal construction and computational procedures for solving the problem are described, using methods of tropical mathematics, which studies algebraic systems with specially defined operations of addition and multiplication. The problem is reduced to the simultaneous approximation of two matrices of pairwise comparisons by a common consistent matrix, in the Chebyshev metric in logarithmic scale. First, auxiliary variables are introduced to represent the minima of the objective functions, and a parameterized inequality is derived, which determines the set of solutions to the original optimization problem. The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the inequality are used to determine the values of the parameters, which correspond to the Pareto front of the problem. All solutions of the inequality for the obtained values of the parameters are taken as a Pareto-optimal solution for the problem. To illustrate the computational procedures used, numerical examples of evaluating ratings of alternatives are given for problems with matrices of the third order.

Keywords: *tropical mathematics, pairwise comparison, bi-criteria problem, Pareto-optimal solution, Pareto frontier.*

Citation: : N. K. Krivulin and M. A. Tsobenko, “Solution of the Two-Criteria Problem of Rating Alternatives using Tropical Optimization,” *Computer tools in education*, no. 4, pp. 15–32, 2019 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2019-4-15-32

References

1. V. V. Podinovskii and V. D. Nogin, *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems], Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. T. Saaty, *Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii* [Making decisions. Hierarchy Analysis Method], Moscow: Radio i svyaz', 1993 (in Russian).
3. V. D. Nogin, *Prinyatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision making in a multi-criteria environment: a quantitative approach], Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
4. M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Berlin: Springer, 2005; doi: 10.1007/3-540-27659-9
5. L. L. Thurstone, "A law of comparative judgment," *Psychological Review*, vol. 34, no. 4, pp. 273–286, 1927; doi: 10.1037/h0070288
6. T. L. Saaty, "A scaling method for priorities in hierarchical structures," *J. Math. Psych.*, vol. 15, no. 3, pp. 234–281, 1977; doi: 10.1016/0022-2496(77)90033-5
7. R. A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Berlin: Springer-Verlag, 1979; doi: 10.1007/978-3-642-48708-8
8. F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics*, Chichester, UK: Wiley, 1993.
9. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control], Moscow: Fizmatlit, 1994 (in Russian).
10. J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations Over Them* (Vol. 556 of Mathematics and Its Applications), New York: Springer, 2003; doi: 10.1007/978-94-017-0383-3
11. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work* (Princeton Series in Applied Mathematics), Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2006.
12. N. K. Krivulin, *Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem* [Idempotent algebra methods in modeling and analysis of complex systems], Saint-Petersburg: Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2009 (in Russian).
13. L. Elsner and P. van den Driessche, "Max-algebra and pairwise comparison matrices, II," *Linear Algebra Appl.*, vol. 432, no. 4, pp. 927–935, 2010; doi: 10.1016/j.laa.2009.10.005
14. B. B. Gursoy, O. Mason, and S. Sergeev, "The analytic hierarchy process, max algebra and multi-objective optimisation," *Linear Algebra Appl.*, vol. 438, no. 7, pp. 2911–2928, 2013; doi: 10.1016/j.laa.2012.11.020
15. N. K. Krivulin and I. V. Gladkikh, "Postroenie soglasovannoi matritsy parnykh sravnenii v marketingovykh issledovaniyakh na osnove metodov tropicheskoi matematiki" [Building a consistent matrix of paired comparisons in marketing research based on methods of tropical mathematics], *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Ser. 8. Menedzhment*, vol. 1, pp. 3–43, 2015 (in Russian).
16. N. Krivulin, "Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons," in *2016 Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*, A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, and B. Ucar eds., Philadelphia, PA: SIAM, 2016, pp. 62–72; doi: 10.1137/1.9781611974690.ch7
17. N. K. Krivulin, V. A. Ageev, and I. V. Gladkikh, "Primenenie metodov tropicheskoi optimizatsii dlya otsenki al'ternativ na osnove parnykh sravnenii" [Application of tropical optimization methods to evaluate alternatives based on pairwise comparisons], *Vestn. S.- Peterb. un-ta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*, vol. 13, no. 1, pp. 27–41, 2017 (in Russian).
18. N. K. Krivulin, "Using tropical optimization techniques in bi-criteria decision problems," *Comput. Manag. Sci.*, vol. 17, no. 1, pp. 79-104, 2018; doi: 10.1007/s10287-018-0341-x
19. N. K. Krivulin and S. N. Sergeev, "Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 377, pp. 31–51, 2019; doi: 10.1016/j.fss.2018.10.013
20. N. Krivulin, "A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints," *Optimization*, vol. 64, no. 5, pp. 1107–1129, 2015; doi: 10.1080/02331934.2013.840624

Received 26.11.2019, The final version — 15.12.2019.

Nikolai K. Krivulin, PhD, professor of Statistical modeling Department Saint Petersburg State University, ✉ nkk@math.spbu.ru

Margarita A. Tsobenko, bachelor student SPbSU, margaritatsobenko@yandex.ru